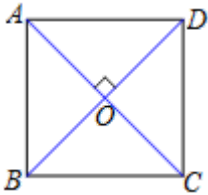


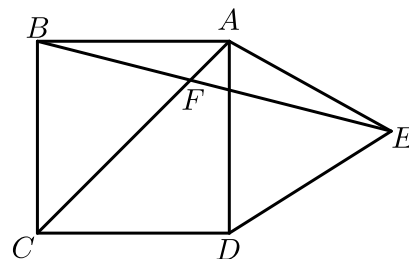
第3讲 正方形的性质与判定

一、正方形的性质

正方形 $ABCD$ 	定义	有一组邻边____，并且有一个角是____的____叫做正方形．
	性质	正方形的四条边都____，对边____． 书写：
		正方形的四个角都是____． 书写：
		正方形的对角线互相____，每一条对角线____一组对角． 书写：
	面积	正方形的面积=____=____

例题

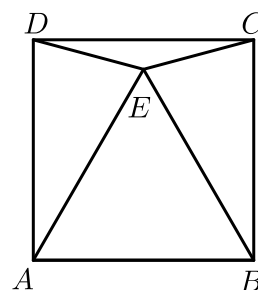
1. 如图，在正方形 $ABCD$ 外侧，作等边三角形 ADE ， AC 与 BE 相交于 F ，则 $\angle CFE$ 为（ ）．



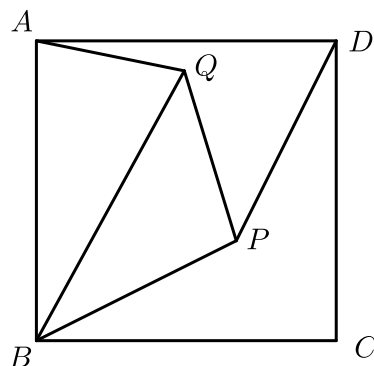
- A. 145° B. 120° C. 115° D. 105°

练习

2. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $\triangle ABE$ 是等边三角形，则 $\angle AED =$ _____ ．

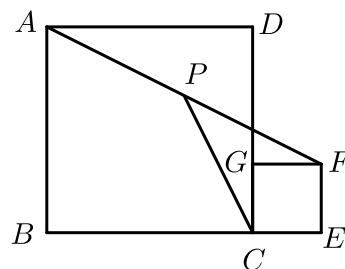


3. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 P, Q 为正方形内的两点，且 $PD = PB$ ， $QB = AB$ ， $\angle CBP = \angle QBP$ ，则 $\angle BQP =$ _____。



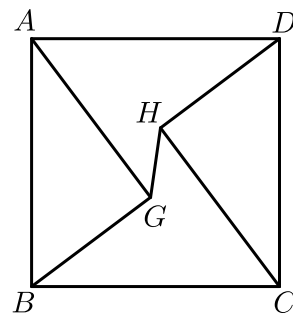
例题

4. 如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $EFGC$ 的边长分别为3和1，点 G 在边 CD 上，点 E 在 BC 的延长线上， P 为 AF 的中点，连接 PC ，则 PC 的长为_____。



练习

5. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为10， $AG = CH = 8$ ， $BG = DH = 6$ ，连接 GH ，则线段 GH 的长为()。



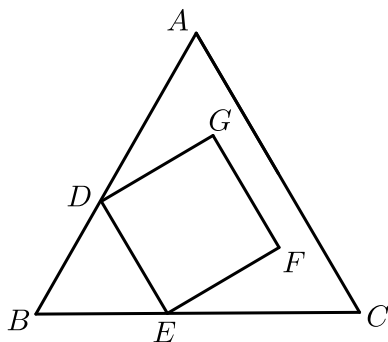
A. $\frac{8\sqrt{3}}{5}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{14}{5}$

D. $10 - 5\sqrt{2}$

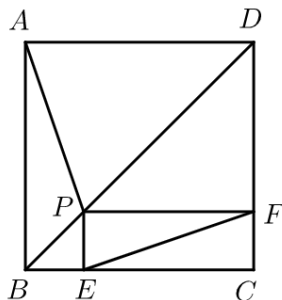
6. 如图为等边三角形 ABC 与正方形 $DEFG$ 的重叠情形，其中 D, E 两点分别在 AB, BC 上，且 $BD = BE$ 。若 $AC = 18, GF = 6$ ，则点 F 到 AC 的距离为（ ）。



- A. $6\sqrt{2} - 6$ B. $6\sqrt{3} - 6$ C. $2\sqrt{5}$ D. $3\sqrt{3}$

例题

7. 如图，点 P 是正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上一点， $PE \perp BC$ 于点 E ， $PF \perp CD$ 于点 F ，连接 EF 给出下列五个结论：① $AP = EF$ ；② $AP \perp EF$ ；③ $\triangle APD$ 一定是等腰三角形；④ $\angle PFE = \angle BAP$ ；⑤ $PD = 2EC$ 。其中有正确结论的个数是（ ）。

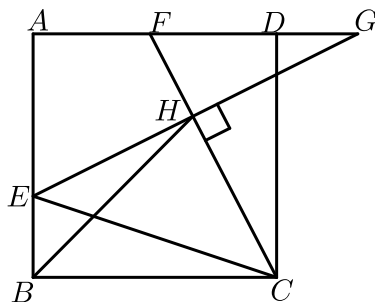


- A. 2个 B. 3个 C. 4个 D. 5个

8. 如图，在边长为 $6\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 中， E 是 AB 边上一点， G 是 AD 延长线上一点， $BE = DG$ ，连接 EG ，过点 C 作 EG 的垂线 CH ，垂足为点 H ，连接 BH ， $BH = 8$ 。

有下列结论：① $\angle CBH = 45^\circ$ ；②点 H 是 EG 的中点；③ $EG = 4\sqrt{10}$ ；④ $DG = 2\sqrt{2}$ 。

其中，正确结论的个数是（ ）。

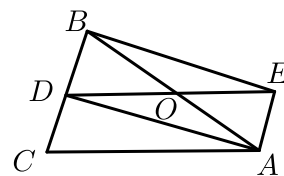


- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、正方形的判定

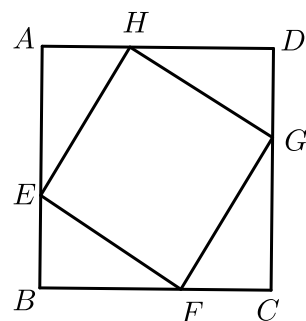
例题

9. 下列说法不正确的是 () .
- A. 对角线互相垂直的矩形一定是正方形
 - B. 对角线相等的菱形一定是正方形
 - C. 对角线互相垂直且相等的平行四边形一定是正方形
 - D. 顺次连接任意对角线相等的四边形的各边中点所得的四边形一定是正方形
10. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线, 点 O 为 AB 的中点, 连接 DO 并延长到点 E , 使 $OE = OD$, 连接 AE , BE .



- (1) 求证: 四边形 $AEBD$ 是矩形.
- (2) 当 $\triangle ABC$ 满足什么条件时, 矩形 $AEBD$ 是正方形, 并说明理由.

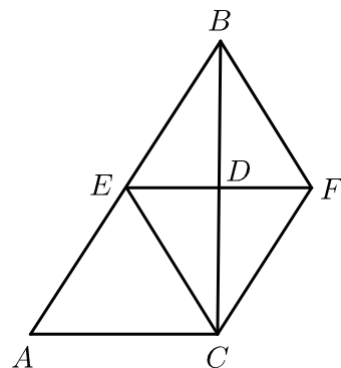
11. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 8cm ． E 、 F 、 G 分别是 AB 、 BC 、 CD 上的动点，且
 $AE = BF = CG = DH$ ．



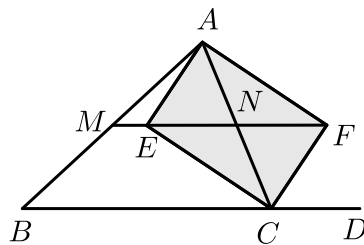
- (1) 求证：四边形 $EFGH$ 是正方形．
 (2) 判断直线 EG 是否经过某一定点，说明理由．

练习

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， BC 的垂直平分线 EF 交 BC 于点 D ，交 AB 于点 E ，且
 $BE = BF$ ，添加一个条件，能证明四边形 $BECF$ 为正方形的是 _____ ．
 ① $BC = AC$ ； ② $CF \perp BF$ ； ③ $BD = DF$ ； ④ $AC = BF$ ．

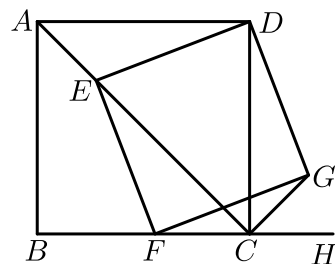


13. 如图：在 $\triangle ABC$ 中， CE 、 CF 分别平分 $\angle ACB$ 与它的邻补角 $\angle ACD$ ， $AE \perp CE$ 于 E ， $AF \perp CF$ 于 F ，直线 EF 分别交 AB 、 AC 于 M 、 N 。



- (1) 求证：四边形 $AECF$ 为矩形。
 (2) 试猜想 MN 与 BC 的关系，并证明你的猜想。
 (3) 如果四边形 $AECF$ 是菱形，试判断 $\triangle ABC$ 的形状，直接写出结果，不用说明理由。

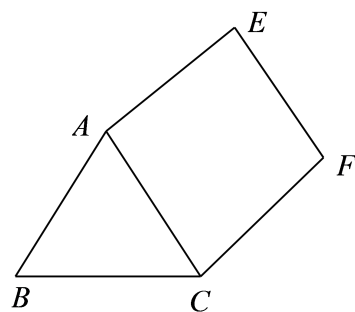
14. 如图，已知四边形 $ABCD$ 为正方形， $AB = 2\sqrt{2}$ ，点 E 为对角线 AC 上一动点，连接 DE ，过点 E 作 $EF \perp DE$ ，交射线 BC 于点 F ，以 DE 、 EF 为邻边作矩形 $DEFG$ ，连接 CG 。



- (1) 求证：矩形 $DEFG$ 是正方形。
 (2) 探究： $CE + CG$ 的值是否为定值？若是，请求出这个定值；若不是，请说明理由。

15. 已知， $\triangle ABC$ 是等边三角形，四边形 $ACFE$ 是平行四边形， $AE = BC$.

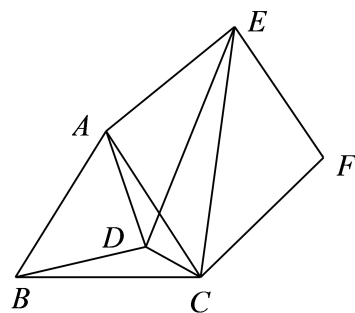
(1) 如图①，求证：平行四边形 $ACFE$ 是菱形 .



图①

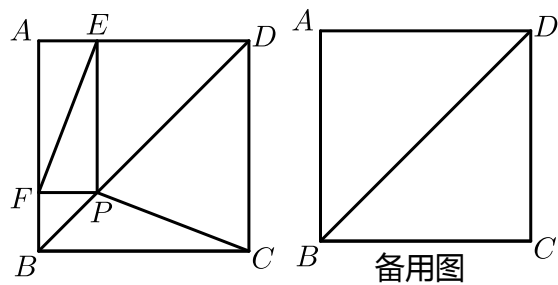
(2) 如图②，点 D 是 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\angle ADB = 90^\circ$ ， $\angle EDC = 90^\circ$ ， $\angle ABD = \angle ACE$.

求证：平行四边形 $ACFE$ 是正方形 .



图②

16. 如图， P 是正方形 $ABCD$ 对角线 BD 上的一动点（不与 B 、 D 重合）， $PE \perp AD$ ， $PF \perp AB$ ，垂足分别为 E 、 F 。



- (1) 求证：四边形 $AFPE$ 为矩形。
- (2) 求证： $PC = EF$ 。
- (3) 当 EF 取最小值时，判断四边形 $APEF$ 是怎样的四边形？证明你的结论。